

Mathématiques en technologies de l'information 1

Plan du cours

- Ch. 1 Nombres et représentation machine
- Ch. 2 Géométrie vectorielle
- Ch. 3 Introduction à la cryptographie et théorie des codes

Evaluation*: Moyenne arithmétique sur 2 épreuves et 1 rapport de TP

*peut varier selon avancement du cours

Nombres et types de nombres

Il existe divers ensembles de nombres :

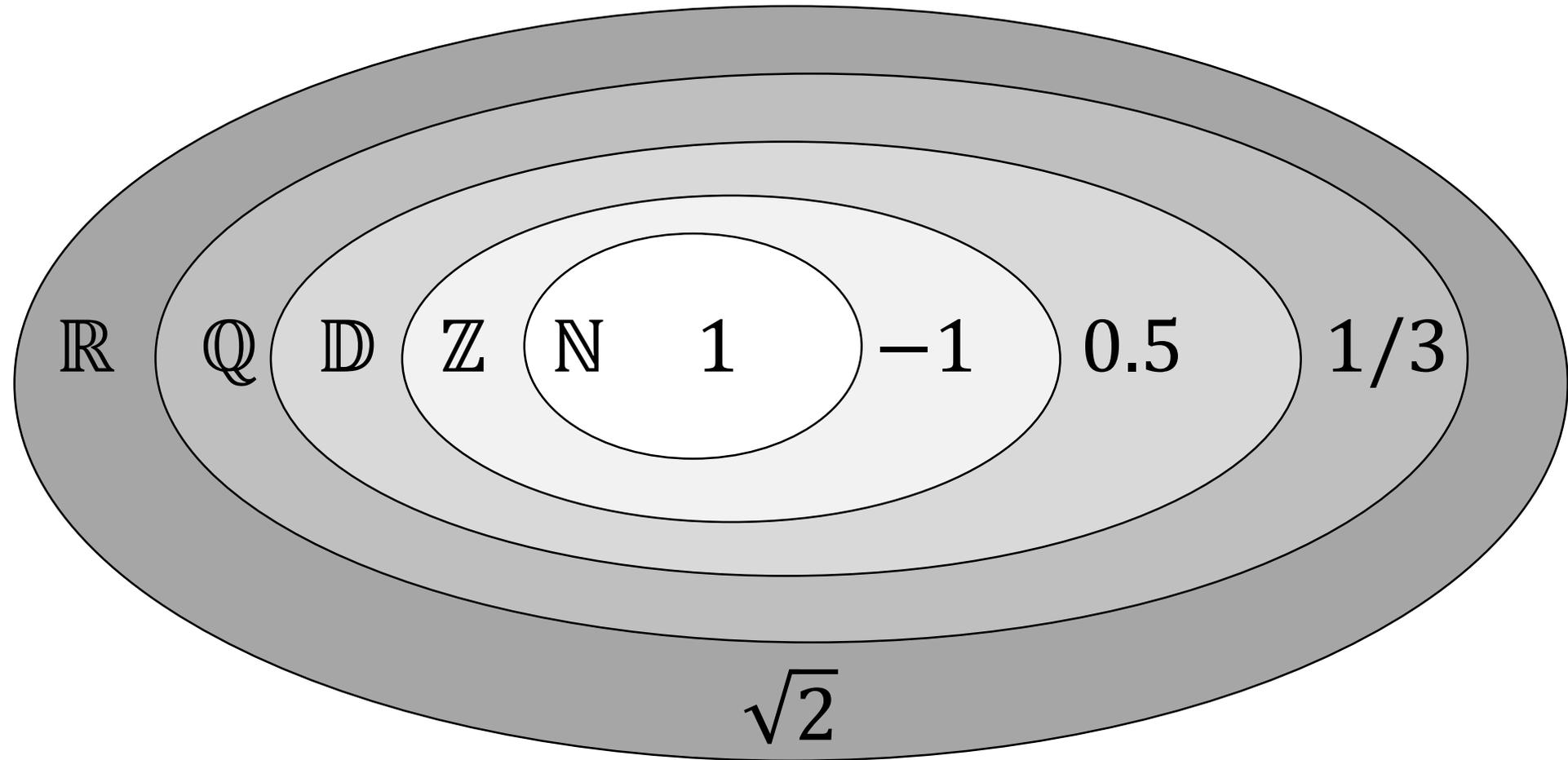
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ les entiers naturels ;
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ les entiers naturels (sans le 0) ;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ les entiers relatifs ;
- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
- $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ les nombres décimaux ;
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$ les nombres rationnels ;
- \mathbb{R} , l'ensemble des nombres réels.

Propriétés

Diverses propriétés des nombres

- \mathbb{D} : tous les nombres avec un nombre fini de décimales ;
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$;
- Les inclusions sont strictes (pas égales);

Propriétés des nombres



Proposition: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Preuve par l'absurde

- Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ - nous allons montrer que cela mène à une contradiction !
- Par hypothèse, il existe une unique fraction **irréductible** $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ avec $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$ ($\text{PGCD}(a, b) = 1$),
- Mettons l'équation au carré :
 $\frac{a^2}{b^2} = 2$, donc $a^2 = 2b^2$
- a^2 est donc PAIR, ce qui implique que a est pair aussi.
- Donc on peut écrire $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$,
- En remplaçant ci-dessus, on obtient que $4k^2 = 2b^2$ ou, autrement dit, $b^2 = 2k^2$;
- Par le même raisonnement, b est donc PAIR – la fraction $\frac{a}{b}$ n'est donc pas irréductible car a et b sont divisibles par 2...

Question:

Existe-t-il des nombres en dehors de \mathbb{R} ?

Réponse : OUI !

Exemple : $\sqrt{2}$ n'est pas défini dans \mathbb{R} , alors qu'est-ce ?

L'ensemble des nombres contenant les racines de nombres négatives est l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} (hors du cadre de ce cours) !

Opérateurs

+	Addition
-	Soustraction (addition de l'opposé)
x ou ·	Multiplication
/ ou ÷	Division (multiplication par l'inverse)
% ou mod	Modulo

Rappel

$$\begin{array}{r|l} 107 & 10 \\ -100 & 10 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \textit{Dividende} & \textit{Diviseur} \\ \hline & \textit{Quotient} \\ \dots & \\ \hline \textit{Reste} & \end{array}$$

$$107 \% 10 = 7$$

Propriétés de l'addition

- admet un ***élément neutre*** (0):

$$x + 0 = x, \forall x$$

- est ***commutatif***

$$x + y = y + x, \forall x, y$$

- est ***associatif***

$$(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z$$

Propriétés de la multiplication

- admet un *élément absorbant* (0) $0 \cdot x = 0, \forall x$
- admet un *élément neutre* (1) $1 \cdot x = x, \forall x$
- est *commutatif* $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y$
- est *associatif* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- est *distributif par rapport à +*
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Question d'intégrité

Les opérateurs sont-ils bien définis ?

En d'autres termes, restent-ils dans leur espaces respectif ?

Exemple : l'addition sur les entiers naturels \mathbb{N} :

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

Oui : l'addition de deux entiers naturels donne TOUJOURS un entier naturel.

Idem pour la multiplication !

Pour la soustraction et la division, ce n'est pas le cas !

Contre-exemples

$$- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

En effet : $5 - 6 = -1 \notin \mathbb{N}!!$

$$\div : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$

En effet : $\frac{1}{3} = 0.333 \notin \mathbb{N}!!$

Contre-exemples

$$- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

En effet : $5 - 6 = -1 \notin \mathbb{N}!!$

$$\div : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$

En effet : $\frac{1}{3} = 0.333 \notin \mathbb{N}!!$

Quel intérêt ?

En informatique, selon le langage, l'opérateur est déduit contextuellement – exemple de c#

```
int i = 5;
int j = 2;
double res = i / j; // Quel est la valeur de res?
double res1 = 1.0 * i / j; // Quel est la valeur de res1?
double res2 = i / (1.0 * j); // Quel est la valeur de res2?
double res3 = 1.0 * i / (1.0 * j); // Quel est la valeur de res3?
```

Quel intérêt ?

```
int i = 5;
int j = 2;
double res = i / j; // Quel est la valeur de res?
double res1 = 1.0 * i / j; // Quel est la valeur de res1?
double res2 = i / (1.0 * j); // Quel est la valeur de res2?
double res3 = 1.0 * i / (1.0 * j); // Quel est la valeur de res3?
```

Réponse:

res = 2.0 !!!!

Ce n'est ni l'arrondi ni la division normale, mais la division ENTIERE !!!

En revanche, on a bien

res1 = res2 = res3 = 2.5

Représentation machine

Problématique

- Sur un ordinateur, on ne dispose que d'une précision **FINIE**, alors comment représenter des nombres comme $\frac{1}{3}$ ou π ?

Les bases – comment écrit-on un nombre ?

Nous considérons comme un acquis que «cent-deux» s'écrit **102**, qui peut se décomposer comme suit

1000	100	10	1	
0	1	0	2	
0	+100	+0	+2	=102

L'écriture en base

Il s'agit de la base 10 – cette notation est donc la suivante

10^3	10^2	10^1	10^0	
0	1	0	2	
0	+100	+0	+2	=102

La position détermine la valeur !!!

NOTE IMPORTANTE :

Il a fallu «INVENTER» le symbole 0 pour que cette notation fasse sens (il fut inventé par babyloniens en 300 Av. J.-C.)

Et si nous changions la base

Au lieu de la base 10, prenons la base 8...

$8^3 = 512$	$8^2 = 64$	$8^1 = 8$	$8 = 1$	
0	1	0	2	
0	+64	+0	+2	=66

Notation

Nous noterons $(102)_{10}$ ou $(102)_8$ pour spécifier la base dans laquelle le nombre est représenté.

Si rien n'est précisé, nous considérons que nous travaillons en base 10 !

Donc

$$(102)_{10} = 102$$

$$(102)_8 = (66)_{10} = 66$$

Généralisation – décomposition en base n

Soit $a \in \mathbb{N}$ et la base $b \in \mathbb{N}^*$, $b > 1$, alors

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=0}^p a_{p-i} b^{p-i} \\ &= a_p b^p + a_{p-1} b^{p-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 \end{aligned}$$

Avec $a_i \in \mathbb{N}$ et $a_p \in \mathbb{N}^*$, pour un $p \in \mathbb{N}$ donné.

Représentation symbolique

La position détermine la valeur.

Pour une base $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, il faut $b-1$ symboles plus 1 symbole pour décrire une valeur nulle pour écrire un nombre

Exemples:

Base 10: $\{\mathbf{0}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Base 2: $\{\mathbf{0}, 1\}$

Quelle base choisir

Le choix d'une base est un compromis entre nombre de symboles à apprendre et nombre de symboles à écrire pour un chiffre:

Exemple :

$$(10001)_{60} = (12960000)_{10}$$

Ou en base 2 (seulement 2 symboles, mais 24 chiffres à écrire!)

$$(110001011100000100000000)_2$$

Le binaire – base 2

$$X = \sum_{i=0}^p x_{p-i} 2^{p-i}$$

Avec $x_i \in \{0,1\}$ et $x_p = 1$, pour un $p \in \mathbb{N}$ donné.

On appelle x_i un **bit**, x_0 est le **bit de poids faible** (le plus à droite) et x_p le **bit de poids fort** (le plus à gauche).

Le binaire – base 2

$$X = \sum_{i=0}^p x_{p-i} 2^{p-i}$$

Avec $x_i \in \{0,1\}$ et $x_p = 1$, pour un $p \in \mathbb{N}$ donné.

On appelle x_i un **bit**, x_0 est le **bit de poids faible** (le plus à droite) et x_p le **bit de poids fort** (le plus à gauche).

Conversion – méthode de division

Diviser le nombre par la base, puis diviser le quotient, jusqu'à obtenir un quotient plus petit que la base

Exemple – Conversion de 34

$$\begin{array}{r|l} 34 & 2 \\ \hline 0 & 17 \end{array}$$

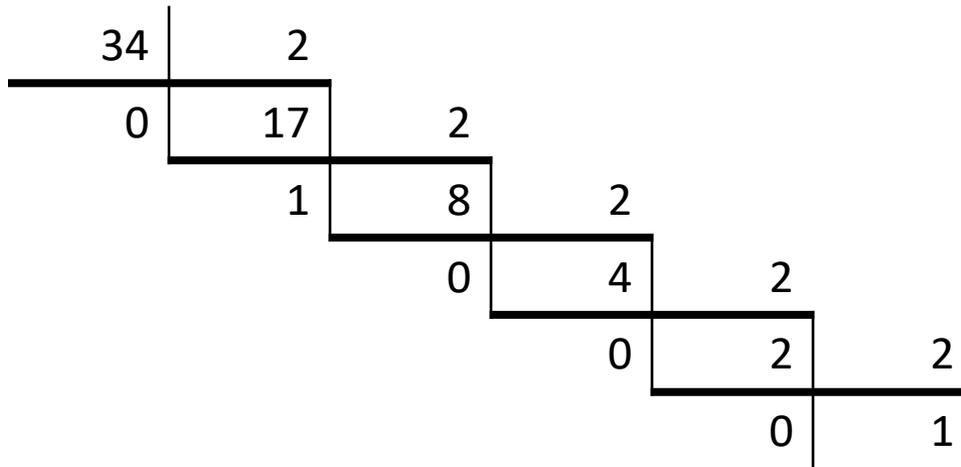
Conversion – méthode de division

$$\begin{array}{r|l} 34 & 2 \\ \hline 0 & 17 & 2 \\ & 1 & 8 \end{array}$$

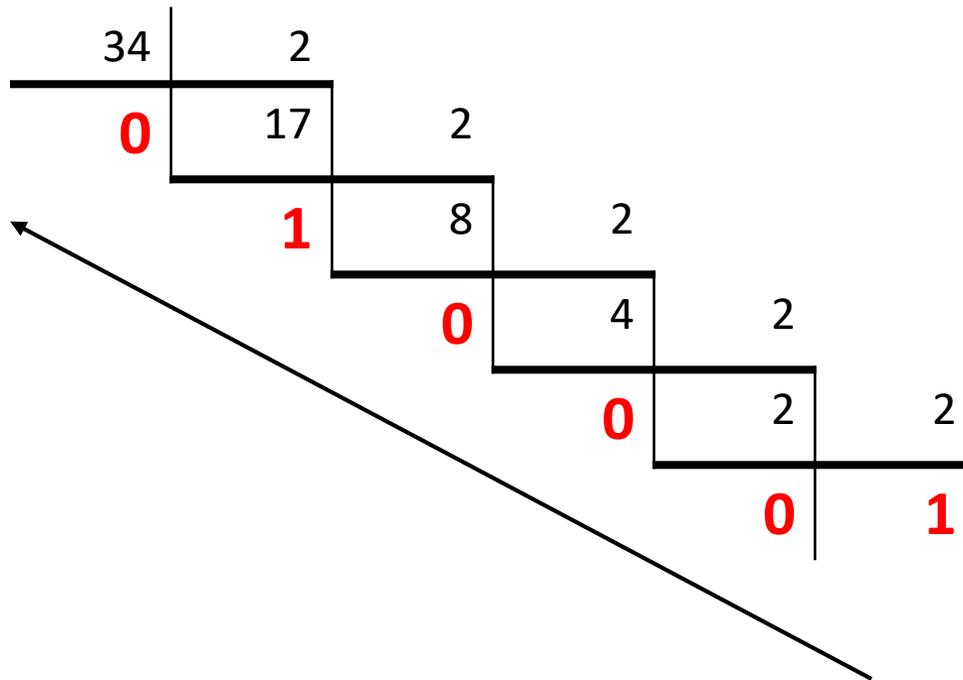
Conversion – méthode de division

$$\begin{array}{r|l} 34 & 2 \\ \hline 0 & 17 & 2 \\ \hline 1 & 8 & 2 \\ \hline & 0 & 4 \end{array}$$

Conversion – méthode de division



Conversion – méthode de division



$$(34)_{10} = (100010)_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + \dots + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$
$$= 32 + 2$$

Conversion – méthode de soustraction

- Chercher la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale au nombre
- Soustraire cette puissance, et recommencer avec le reste, jusqu'à obtenir 0

Méthode par soustraction

Exemple – 34

$(34)_{10}$: la plus grande puissance de 2 précédent est

$$(32)_{10} = 2^5$$

Le reste de la soustraction est

$$(34)_{10} - (32)_{10} = 2 = 2^1$$

Le reste est 0 !

Donc

$$\begin{aligned}(32)_{10} &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= (100010)_2\end{aligned}$$

Exercices :

Quelle est la représentation binaire de $(173)_{10}$?

Quelle est la plus grande valeur que l'on peut exprimer avec 32 bits (en base 2 donc) ?

Quelle est la valeur maximale pour un nombre en base 2 avec N bits $(11 \dots 1)_2$?

Exercices :

Quelle est la représentation binaire de $(173)_{10}$?

Réponses :

$$(173)_{10} = (10101101)_2$$

4'294'967'296

$$(11..1)_2 = 2^N - 1$$

Par exemple pour $N = 8$, la valeur maximale est 255.

Exercices :

Quelle est la représentation binaire de $(17F)_{16}$ en base 60 ?

Indice : passez par la base 10 puis écrivez les symboles de la base 60 avec 2 chiffres, par exemple $(0100)_{60} = 60$!

Exercices :

Quelle est la représentation binaire de $(173)_{10}$?

Réponses :

$$(173)_{10} = (10101101)_2$$

$$(11..1)_2 = 2^N - 1$$

Par exemple pour $N = 8$, la valeur maximale est 255.

Exercices :

Quelle est la représentation binaire de $(173)_{10}$?

Réponse : $(10101101)_2$

Changement de base

Cas particulier du passage de la base 2 à la base 16 :

1. Rajouter des 0 à gauche jusqu'à ce que le nombre de bits atteigne un multiple de 4
2. Découper les bits par paquets de 4
3. Remplacer chaque paquet de 4 par sa valeur en base 16
(p.ex. $(0000)_2 = (0)_{16}$, $(0111)_2 = 7$, $(1111)_2 = (A)_{16}$)

Changement de base

Cas particulier du passage de la base 16 à la base 2 :

1. Remplacer chaque élément en base 16 par sa valeur en binaire
2. Accoler les paquets de 4 bits ainsi obtenus (dans le même ordre)

Exemple $(10110)_2 = (?)_{16}$

1. $(10110)_2 = (0001\ 0110)_2$

2. $(0001)_2 = (1)_{16}$, $(0110)_2 = (6)_{16}$

3. Le résultat est donc

$$(16)_{16}$$

Binaire	Hexa
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Exemple $(A01)_{16} = (?)_2$

1. $(A)_{16} = (1010)_2$, $(0)_{16} = (0000)_2$, $(1)_{16} = (0001)_2$

2. Le résultat est donc

$$(1010\ 0000\ 0001)_2$$

Représentation des entiers signés

Complément à base deux

L'écriture en complément à base deux d'un nombre X sur N bits s'effectue comme suit :

- Si $X \geq 0$, alors le 1^{er} bit (à gauche) est 0, et X s'écrit sur les $N - 1$ bits restants
- Si $X < 0$, alors le 1^{er} bit (à gauche) est 1, les $N - 1$ bits restants contiennent $2^{N-1} + X$.

Notation: si X est exprimé en complément à deux sur N bits, on notera $(X)_{\bar{2}N}$.

Exemple avec $N = 4$

- Si $X \geq 0$, alors le 1^{er} bit (à gauche) est 0, et X s'écrit sur les 3 bits restants

Valeur en base 10	Complément à base deux avec 4 bits Noté $(X)_{\bar{2}^4}$
0	$(0\ 000)_{\bar{2}^4}$
1	$(0\ 001)_{\bar{2}^4}$
2	$(0\ 010)_{\bar{2}^4}$
3	$(0\ 011)_{\bar{2}^4}$
4	$(0\ 100)_{\bar{2}^4}$
5	$(0\ 101)_{\bar{2}^4}$
6	$(0\ 110)_{\bar{2}^4}$
7	$(0\ 111)_{\bar{2}^4}$

Exemple avec $N = 4$

- Si $X < 0$, alors le 1^{er} bit (à gauche) est 1, les 3 bits restants contiennent $8 + X$.

Valeur en base 10	$8 + X$	Complément à base deux avec 4 bits
-8	0	$(1\ 000)_{\bar{2}^4}$
-7	1	$(1\ 001)_{\bar{2}^4}$
-6	2	$(1\ 010)_{\bar{2}^4}$
-5	3	$(1\ 011)_{\bar{2}^4}$
-4	4	$(1\ 100)_{\bar{2}^4}$
-3	5	$(1\ 101)_{\bar{2}^4}$
-2	6	$(1\ 110)_{\bar{2}^4}$
-1	7	$(1\ 111)_{\bar{2}^4}$

Reconversion en base 10

L'écriture en complément à base deux d'un nombre X sur N bits s'effectue comme suit :

- Si le premier bit est 0, alors $X = (\dots)_2$,
- Si le premier bit est 1, alors $X = -2^{N-1} + (\dots)_2$,

où $(\dots)_2$ sont les $N - 1$ bits restants, après avoir enlevé le bit le plus à gauche (bit de poids fort) en base 2 standard.

Exercices :

Ecrire 36 et -72 en complément à base deux sur 8 bits.

Exercices :

Ecrire 36 et -72 en complément à base deux sur 8 bits.

Réponse :

$$36 = (0\ 0100100)_{\bar{2}^8}$$

$$-72 \Rightarrow (128 - 72) = (56) = (0111000)_2$$

Et donc, le passage en complément à base 2 :

$$-72 = (10111000)_{\bar{2}^8}$$

Exercices :

Que valent $(00101011)_{\bar{2}^8}$ et $(10101011)_{\bar{2}^8}$?

Réponse :

$$(00101011)_{\bar{2}^8} = 43$$

$$(10101011)_{\bar{2}^8} = -(2^7 - 43)$$

Addition en complément à base deux

L'addition de 2 nombres en complément à base deux sur $N = 4$ bits

$$\begin{array}{r} (1)_{10} \quad (0001)_{\bar{2}^8} \\ + (5)_{10} \quad (0101)_{\bar{2}^8} \\ = (7)_{10} \quad (0110)_{\bar{2}^8} \end{array}$$

Addition en complément à base deux

L'addition de 2 nombres en complément à base deux sur $N = 4$ bits

$$\begin{array}{r} (3)_{10} \quad (0011)_{\bar{2}^8} \\ + \quad (-4)_{10} \quad (1100)_{\bar{2}^8} \\ = \quad (-1)_{10} \quad (1111)_{\bar{2}^8} \end{array}$$

Addition en complément à base deux

L'addition de 2 nombres en complément à base deux sur $N = 4$ bits

$$\begin{array}{r} (-1)_{10} \quad (1111)_{\bar{2}^8} \\ + \quad (-4)_{10} \quad (1100)_{\bar{2}^8} \\ = \quad (-5)_{10} \quad (1011)_{\bar{2}^8} \end{array}$$

En effet:

$$(1011)_2^* = -2^3 + (011)_2 = -8 + 3 = -5$$

ATTENTION AUX DEPASSEMENTS ! (overflow)

Que se passe-t-il si le résultat est plus grand que 2^{N-1} ?

Or:

$$\begin{array}{r} (5)_{10} \quad (0101)_{\bar{2}^8} \\ + \quad (5)_{10} \quad (0101)_{\bar{2}^8} \\ = \quad (10)_{10} \quad (1010)_{\bar{2}^8} \end{array}$$

$$(1010)_{2^*} = -2^3 + (010)_2 = -8 + 2 = -6$$

Pourquoi le complément à base 2

1. Conservation de opérations : «grâce» à l'overflow, l'addition de *int* donne toujours un *int*.
2. Une suite logique «cyclique» (d'où le overflow ou underflow)

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(1\ 00)_{\bar{2}^3}$	$(1\ 01)_{\bar{2}^3}$	$(1\ 10)_{\bar{2}^3}$	$(1\ 11)_{\bar{2}^3}$	$(0\ 00)_{\bar{2}^3}$	$(0\ 01)_{\bar{2}^3}$	$(0\ 10)_{\bar{2}^3}$	$(0\ 11)_{\bar{2}^3}$

Note: $3 + 1$ revient à écrire (en base 2) $(100)_2$ qui, en complément en base 2, est -4 (on revient au début de l'intervalle).

Int vs uint

Note: les entiers non-signés (*uint*) fonctionnent sur le même principe d'overflow, mais sans les valeurs négatives.

Sur N bits, le «cycle» *int* va de $[-2^{N-1}, 2^{N-1} - 1]$

alors que pour les entiers non-signés *uint* va de $[0, 2^N - 1]$.

Si $N = 8$:

int va de $[-128, 127]$ alors que *uint* va de $[0, 255]$!

Exercice

Quel est l'ensemble des nombres que l'on peut écrire en complément à base 2 avec $N = 8$ bits ?

De manière générale, qu'en est-il pour N bits ?

Exercice

Quel est l'ensemble des nombres que l'on peut écrire en complément à base 2 avec $N = 8$ bits ?

De manière générale, qu'en est-il pour N bits ?

Réponse :

$N = 8$:

le plus petit nombre est $(10000000)_{\bar{2}^8} = -2^7 + 0 = -128$

le plus grand nombre est $(01111111)_{\bar{2}^8} = 127$

De manière générale, cette méthode permet d'écrire les nombres dans l'intervalle $[-2^{N-1}, 2^{N-1} - 1]$.

Overflow – un exemple !

4 Juin 1996

- Le vol 501 se termine après 37 secondes par une explosion de la fusée Ariane 5
- L'enquête révèle qu'à l'origine se trouve la conversion d'un double (sur 64bits) vers un entier signé (sur 16 bits),
- Le nombre en question était une mesure de l'accélération horizontale,
- Le code provenait de la fusée Ariane 4 dont l'accélération pouvait être codée sur 16 bit...
- MAIS sur Ariane 5, l'accélération était jusqu'à 5 fois supérieure...
- Verdict : un bug causant une perte de \$370Mio...

Et pour les autres ?

Qu'en est-il pour les autres nombres ?

- C'est ok si $x \in [-2^{N-1}, 2^{N-1} - 1]$ avec le complément à 2, mais....
- Si $x \geq 2^{N-1}$, ou
- Si $x < -2^{N-1}$, ou
- Si $x \in \mathbb{Q} \setminus [-2^{N-1}, 2^{N-1} - 1]$,
- Ou pire, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$???

Limitation : précision finie !!!

Quelle que soit l'approche, en précision finie, nous ne pouvons travailler qu'avec des nombres DECIMAUX (nombre de décimales fini) !!

Pour tous les nombres non-décimaux (ou avec trop de décimales), nous travaillerons forcément avec une valeur arrondie !

Principe : écriture scientifique

Généralisation :

En écriture scientifique, tout nombre s'écrit sous la forme suivante

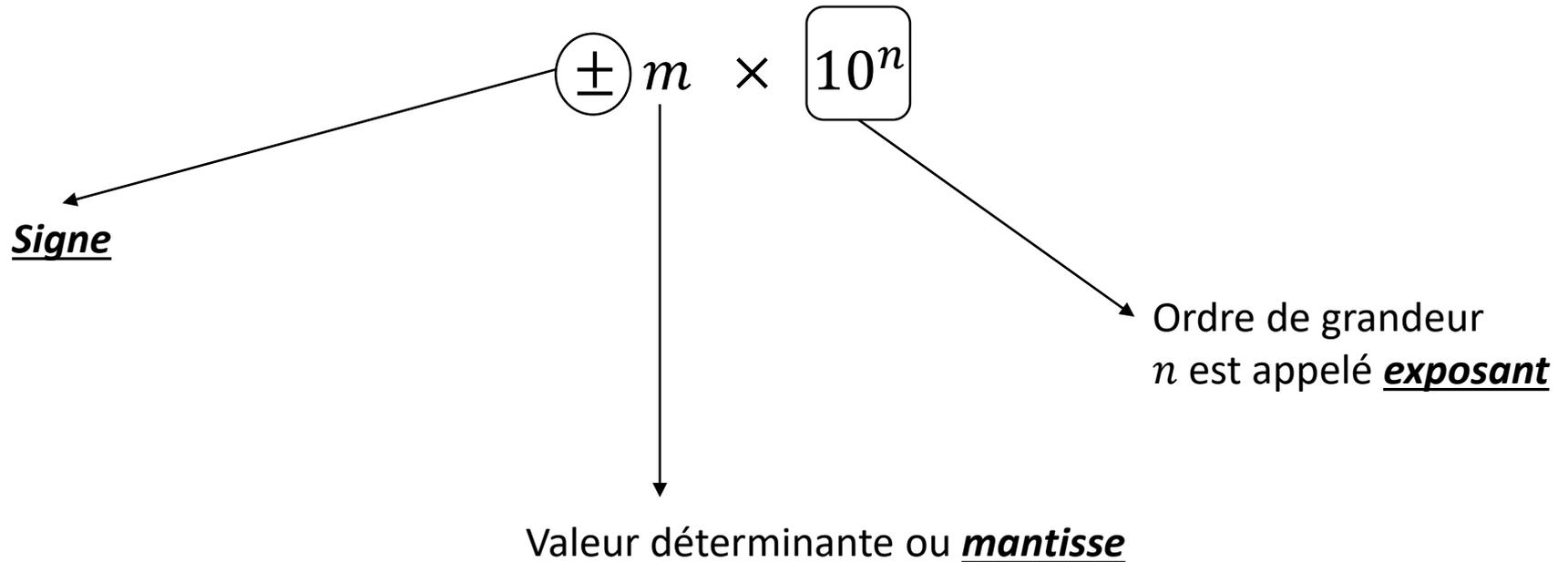
$$\pm m \times 10^n$$

où $m \in [1, 10)$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Variante:

Il se peut que l'on force $m \in [0.1, 1)$, ce qui donnerait, pour la masse de l'électron, $0.9109 E - 32 \text{ kg}...$

Principe : écriture scientifique



Nombres à virgule flottante

En langage machine, on utilise le même principe que l'écriture scientifique :

$$X = (-1)^s \times (1 + m) \times 2^e$$

Standard : Norme IEEE 754

Définit également les modes d'arrondis, calculs, détection des overflow, ...

IEE pour *Institute of Electrical and Electronics Engineers.*

Nombres à virgule flottante en binaire

En 32 bits, le signe est codé sur 1 bit, l'exposant sur 8 bits et la mantisse sur les 23 bits restants

$$X = (-1)^s \times (1 + m) \times 2^e$$

1	2	3	...	8	9	10	11	...	32
$(-1)^s$	e_0	e_1	$...$	e_6	e_7	m_1	m_2	$...$	m_{23}

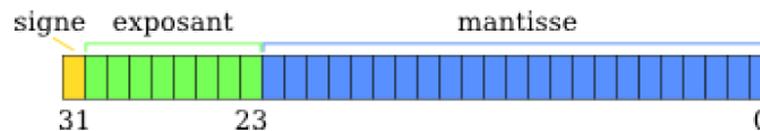
IMPORTANT : En base 2, le bit de poids fort de la mantisse (le plus à gauche) est **TOUJOURS** 1 pour un nombre flottant (sauf cas particulier). Il n'est donc pas stocké (cela offre un bit supplémentaire pour la mantisse).

Nombres à virgule flottante

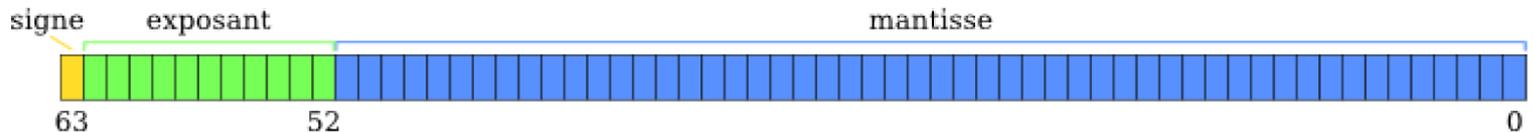
32 bits vs 64 bits

Élément	Bits en 32 bits	Bits en 64 bits
s (signe)	1	1
e (exposant)	8	11
m (mantisse)	23	52

32 bits



64 bits



Encodage des parties (32 bits)

- Signe :

le nombre est positif si le premier bit est 0, négatif s'il est 1.

- Exposant :

Avec 8 bits, on peut encoder des nombres de $[0, 255 = 2^8 - 1]$. Afin d'exprimer les exposants négatifs aussi bien que positifs, la norme IEEE-754 définit que

$$e = (e_0 e_1 \dots e_7) - 127$$

- Mantisse :

Le premier bit (caché) est toujours 1 (pour 2^0) et les bits suivants correspondent aux puissances $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2^{-2} = \frac{1}{4}$, ...

Encodage des parties (32 bits)

La formule d'un nombre flottant est donc

$$X = (-1)^s \cdot 2^{(e_0 e_1 \dots e_7)_2 - 127} \cdot (1 + (m_1 m_2 \dots m_{23})_2 \cdot 2^{-1})$$

Où la notation

$$(m_1 m_2 \dots m_{23})_2 \cdot 2^{-1} = m_1 \cdot 2^{-1} + m_2 \cdot 2^{-2} + \dots + m_{23} \cdot 2^{-23}$$

Cas spéciaux

0:

- Le nombre encodé uniquement avec des $(0 \dots 0) = +0$ alors que $(10 \dots 0) = -0$ (les cas sont différenciés).

Nombres dénormalisés :

- Si l'exposant est $(e_0 e_1 \dots e_7)_2 = (00000000)_2 = 0$, le premier bit non-stocké de la mantisse est 0, et non 1;
- Le nombre est de la forme $(-1)^s \times (0m_1 \dots m_{23})_2 \times 2^{-126}$ (nombre dénormalisé).

Infini / NaN (Not a Number):

- Si l'exposant est $(e_0 e_1 \dots e_7)_2 = (11111111)_2 = 255$, le

Cas spéciaux

Infini :

- Si l'exposant est $(e_0e_1 \dots e_7)_2 = (11111111)_2 = 255$, et la mantisse contient uniquement des 0, on a $\pm\infty$ (selon la valeur du 1^{er} bit)

NaN (Not a Number) :

- Si l'exposant est $(e_0e_1 \dots e_7)_2 = (11111111)_2 = 255$, et la mantisse contient au moins 1 bit de valeur 1, le nombre est «non défini».

32 bits – Valeurs min et max

	Exposant	Mantisse	Valeur base 10 approchée
Min dénormalisé	0000 0000	00...00	1.4×10^{-45}
Max dénormalisé	0000 0000	11...11	$1.17549421 \times 10^{-38}$
Min normalisé	0000 0001	00...00	$1.17549435 \times 10^{-38}$
1	0111 1111	00...00	1.00000000
Successeur de 1	0111 1111	00...01	1.00000012
Max normalisé	1111 1110	11...11	$3.40282346 \times 10^{38}$

Conversion de nombres à virgules

Pour convertir un nombre quelconque $(X, Y)_{10}$ à la norme IEEE 754

- 1) Déterminer les signe (détermine le 1^{er} bit),
- 2) Ecrire les parties entières et décimales sous forme binaire sous la forme $(X)_2$ et $(Y)_{\frac{1}{2}}$ (arrêter dès que le nombre de bits dépasse 23 !),
- 3) Définir $E = (127 + \# \text{ de bits de } (X)_2 - 1)_2$, et convertir $(E)_2$ pour encoder l'exposant,

Conversion de nombres à virgules

4) Définir $M = \left[(X)_2 | (Y)_{\frac{1}{2}} \right]_{(1, \dots, 23)}$ ce qui revient à

- Supprimer TOUS les 0 et LE PREMIER 1 à gauche
- Garder uniquement les 23 premiers bits

Méthode de multiplication

- Nous avons vu la méthode de division pour décrire tous les bits de la partie entière.
- Pour la partie décimale, il faut utiliser la **méthode de multiplication** :
 - Enlever la partie entière
 - Multiplier par 2 et
 - La partie entière correspond au bit à garder
 - Recommencer avec la partie décimale jusqu'à obtenir 0 ou atteindre le nombre de bits souhaités

Exemple: $(0.625)_{10} \Rightarrow (?)_{\frac{1}{2}}$

- Nous noterons $(X)_{1/2}$ pour dénoter l'écriture

$$X = x_0 * 2^{-1} + x_1 * 2^{-2} + \dots$$

$$2^{-1}: \quad 0.625 \times 2 = 1.25$$

$$2^{-2}: \quad 0.25 \times 2 = 0.5$$

$$2^{-3}: \quad 0.5 \times 2 = 1.0$$

$$2^{-4}: \quad 0.0 \times 2 = 0.0$$

$$2^{-5}: \quad 0.0 \times 2 = 0.0$$

...

Exemple: $(0.625)_{10} \Rightarrow (?)_{\frac{1}{2}}$

- Nous noterons $(X)_{1/2}$ pour dénoter l'écriture

$$X = x_0 * 2^{-1} + x_1 * 2^{-2} + \dots$$

2^{-1} :	$0.625 \times 2 = 1.25$	←
2^{-2} :	$0.25 \times 2 = 0.5$	←
2^{-3} :	$0.5 \times 2 = 1.0$	←
2^{-4} :	$0.0 \times 2 = 0.0$	⋮
2^{-5} :	$0.0 \times 2 = 0.0$	
...		...

$$(0.625)_{10} = (10100\dots)_{1/2}$$

ATTENTION

- Pour la méthode de la ***DIVISION***, les bits se lisent dans le sens INVERSE (premier bit = dernier reste !)
- Pour la méthode de la ***MULTIPLICATION***, les bits sont lus dans le sens qu'ils apparaissent (premier bit = première partie entière !)

Quelle précision

En 32 bits, la mantisse est codée sur 24 bits (23+1 bit en normalisé).

La valeur maximale de la mantisse est donc

$$(11 \dots 11)_2 = 2^{24} - 1 = 16'777'216 \cong 1.6 \times 10^7$$

Par conséquent, la précision d'un nombre à virgule flottante (en 32 bits) ne dépasse pas les 7 premiers chiffres!

Conséquence:

En 32 bits, certaines opérations sont «sans intérêt» à cause d'arrondis.

Exemple (c#)

```
float f1 = 1000000.0f;  
float f2 = 0.1f;  
float res = f1 + f2; // res = 1000000.13
```

```
float f1 = 1000000.0f;  
float f2 = 0.1f;  
float res = f1 + f2;  
bool isEqual = res == 1000000.0f; // true!!!
```

Cas réel – eSwys Comptabilité

- Test avec d'une société fictive ayant un chiffre d'affaires de plusieurs millions (au cumul – aucun montant seul ne dépasse 100'000 Chf)
- Les soldes finaux des comptes (calculés) ne sont pas corrects...
- Car la comptabilité contenant des montants de l'ordre du million ne peut se faire au centime près en 32-bits !!!!

Solution : utiliser des nombres à double précision (sur 64 bits) !!!